スタディサプリ　難関私立大 数学ⅠAⅡBについて

この講座は，難関私立大学における個別試験を受験する生徒を対象に，実際に出題された入試問題を題材に，これまでの学習で培ってきた力をもとに，どのように問題を解きほぐし，アウトプットすべきかを伝授する講座です。

この講座を受けていただく時点でのあなたの実力が，難関私立大学があなたに期待している解法に対して，どこまで到達し，上回り，また下回っているかについて，予習と講義動画を通じて分野別に整理することで，あなたの今後の学習の指針となるでしょう。

山内　恵介

― 目次 ―

第１講	小問集合，三角比と平面図形	2
第２講	場合の数と確率	5
第３講	微分・積分	8
第４講	ベクトル，数列	11

※授業当日までに，該当する講の「予習」を，ノート等に必ず行ってから授業に臨んで下さい。
当日の授業は，予習を行っていることを前提に行われます。

第１講　小問集合，三角比と平面図形

1　次の空欄に当てはまる数を答えよ．

(1)　$a=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ のとき，$a+\dfrac{1}{a}=$ ［　　］ であり，$a^2+\dfrac{1}{a^2}=$ ［　　］ である．

(2)　$\sqrt{n^2-8n+1}$ が整数となる整数 n の個数は ［　　］ 個あり，最も大きい n の値は ［　　］ である．

(3)　a，b，c を実数の定数とし，$f(x)=x^2-4ax+a$，$g(x)=x^2-bx+c$ とする．2 次方程式 $f(x)=0$ は異なる 2 つの解をもつとし，それらを α，β とおく．また，2 次方程式 $g(x)=0$ は異なる 2 つの解 $\dfrac{\alpha}{\beta}$，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ をもつとする．このとき

$b=$ ［　　］ $a-$ ［　　］，　$c=$ ［　　］

である．さらに $\dfrac{\alpha}{\beta}$，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ がともに純虚数のとき，$a=\dfrac{［\quad］}{［\quad］}$ となり，$f(x)=0$ の解は $\dfrac{［\quad］}{［\quad］}\pm\dfrac{［\quad］}{［\quad］}i$ となる．ただし，i は虚数単位を表す．

2　次の $\boxed{}$ をうめよ．

[1]　(1)　不等式 $\sqrt{\sin^2 x+\dfrac{1}{2}}<\cos x$ $(0\leqq x<2\pi)$ を満たす x の値の範囲は $\boxed{}$ である．

(2)　$\cos x\cos(\pi-x)=\sin 2x$，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つとき，$\sin x=$ $\boxed{}$ である．

[2]　次の空欄に当てはまる数を答えよ．

x を，$x>0$，$x\neq 1$ を満たす実数とする．

不等式 $\log_2\left(\sqrt{2}\,x\right)-\log_{\sqrt{x}}8+2>0$ ………(i) を満たす実数 x の範囲について考える．

$\log_2 x=X$ とおく．$0<x<$ $\boxed{ア}$ のとき，$X<0$ であり，$x>$ $\boxed{ア}$ のとき，$X>0$ である．

$\log_2\left(\sqrt{2}\,x\right)=X+\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ であり，$\log_{\sqrt{x}}8=\dfrac{\boxed{エ}}{X}$ である．

$0<x<$ $\boxed{ア}$ とする．このとき $X<0$ であるから，(i)が成り立つことと

$$X^2+\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}X-\boxed{キ}<0 \quad\cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

が成り立つことは同値である．

$X<0$ と(ii)を同時に満たす X の範囲は，$\boxed{クケ}<X<\boxed{コ}$ であり，

$0<x<$ $\boxed{ア}$ と(i)を同時に満たす x の範囲は，$\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シス}}<x<\boxed{セ}$ である．

$x>$ $\boxed{ア}$ と(i)を同時に満たす x の範囲は $x>\boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タ}}$ である．

3

[1]　△ABC において，AB＝9，BC＝7，CA＝8 とする．また，△ABC の内接円と辺 BC，辺 CA，辺 AB との接点を，それぞれ D，E，F とする．このとき，以下の設問に答えよ．

(1)　線分 AE の長さを求めよ．

(2)　線分 EF の長さを求めよ．

(3)　線分 AD の長さを求めよ．

[2]　次の空欄に当てはまる数を答えよ．

AB＝6，AC＝10，$\cos\angle A=\dfrac{1}{5}$ である △ABC を考える．このとき △ABC の面積を S とすると，BC＝$\boxed{}\sqrt{\boxed{}}$，$S=\boxed{}\boxed{}\sqrt{\boxed{}}$ である．

A から辺 BC に下ろした垂線を AH とするとき，AH＝$\dfrac{\boxed{}\sqrt{\boxed{}\boxed{}}}{\boxed{}}$ である．

また，線分 AH を直径とする円と AB との交点を P，AC との交点を Q とすると，

$$AP=\frac{\boxed{}\boxed{}}{\boxed{}},\quad AQ=\frac{\boxed{}\boxed{}\boxed{}}{\boxed{}\boxed{}}$$

である．ただし，点 P，Q は A とは異なるとする．

テキスト解答

【講義問題の解答・解説】

第１講　小問集合，三角比と平面図形

1 (1) $a=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ より，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\dfrac{2(3+\sqrt{5})}{4}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

よって，$a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}+\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=3$

$$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\cdot a\cdot\frac{1}{a}=3^2-2=7$$

(2) $\sqrt{n^2-8n+1}=k$（k は 0 以上の整数）とおくと

$n^2-8n+1=k^2$

$(n-4)^2-16+1=k^2$

$(n-4)^2-k^2=15$　　ゆえに $(n+k-4)(n-k-4)=15$

$n+k-4$，$n-k-4$ は整数であり，$k\geqq 0$ より $n+k-4\geqq n-k-4$ であることから，

$(n+k-4,\ n-k-4)=(15,\ 1),\ (5,\ 3),\ (-3,\ -5),\ (-1,\ -15)$

$(n,\ k)=(12,\ 7),\ (8,\ 1),\ (0,\ 1),\ (-4,\ 7)$

したがって，整数 n の個数は 4 個あり，そのうち最も大きい n は $n=12$ である.

(3) 2 次方程式 $f(x)=0$，つまり $x^2-4ax+a=0$ の 2 解が α，β であることより，

解と係数の関係から $\alpha+\beta=4a$，$\alpha\beta=a$

2 次方程式 $g(x)=0$，つまり $x^2-bx+c=0$ の 2 解が $\dfrac{\alpha}{\beta}$，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ であることより，

解と係数の関係から $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=b$，$\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\beta}{\alpha}=c$

よって，$b=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{(4a)^2-2a}{a}=16a-2$，　$c=1$

$\dfrac{\alpha}{\beta}$，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ がともに純虚数のとき，$\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$ は純虚数または 0 である.

$b=\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$ であり，b は実数であることから，$b=0$ である.

よって $16a-2=0$ より，$a=\dfrac{1}{8}$

このとき $f(x)=0$，つまり $x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{8}=0$ の 2 解は $x=\dfrac{1}{4}\pm\dfrac{1}{4}i$ である.

2 [1] (1) $\cos x\leqq 0$ のとき，(左辺) >0，(右辺) $\leqq 0$ となり不適.

$\cos x>0$ のとき，両辺正であることから，両辺を 2 乗して

$$\sin^2 x+\frac{1}{2}<\cos^2 x$$

$$\sin^2 x+\frac{1}{2}<1-\sin^2 x$$

$\sin^2 x<\dfrac{1}{4}$　ゆえに $-\dfrac{1}{2}<\sin x<\dfrac{1}{2}$

これと $0\leqq x<2\pi$，$\cos x>0$ より　$0\leqq x<\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{11}{6}\pi<x<2\pi$

(2)　$\cos x\cos(\pi-x)=\sin 2x$

$-\cos^2 x=2\sin x\cos x$

$\cos x(2\sin x+\cos x)=0$

$\cos x=0$，または，$2\sin x+\cos x=0$

$\cos x=0$ のとき $-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $\sin x=\pm 1$

$\cos x\neq 0$ のとき $2\sin x+\cos x=0$ より $\tan x=-\dfrac{1}{2}$

このとき　$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ より $\cos^2 x=\dfrac{4}{5}$

$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

よって，$\sin x=\tan x\cdot\cos x=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

以上より $\sin x=\pm 1$，$-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

[2] 真数および底の条件より $x>0$，$x\neq 1$

$\log_2 x=X$ とおくと，$0<x<1$ のとき $X<0$ であり，$x>1$ のとき $X>0$ である．

$\log_2(\sqrt{2}\,x)=\log_2\sqrt{2}+\log_2 x=X+\dfrac{1}{2}$，　$\log_{\sqrt{x}}8=\dfrac{\log_2 8}{\log_2\sqrt{x}}=\dfrac{3}{\dfrac{1}{2}\log_2 x}=\dfrac{6}{X}$

(i)より $\left(X+\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{6}{X}+2>0$　　よって $X+\dfrac{5}{2}-\dfrac{6}{X}>0$ …… ①

$0<x<1$ のとき

①の両辺に $X(<0)$ をかけて　$X^2+\dfrac{5}{2}X-6<0$

$2X^2+5X-12<0$　　$(2X-3)(X+4)<0$　　よって $-4<X<\dfrac{3}{2}$

$X<0$ より $-4<X<0$　　$\log_2\dfrac{1}{16}<\log_2 x<\log_2 1$　　したがって $\dfrac{1}{16}<x<1$

$x>1$ のとき

①の両辺に $X(>0)$ をかけて整理すると $(2X-3)(X+4)>0$　　よって

$X<-4$，$\dfrac{3}{2}<X$

$X>0$ より $X>\dfrac{3}{2}$　　$\log_2 x>\log_2 2\sqrt{2}$　　したがって $x>2\sqrt{2}$

3 [1] (1)　AE＝AF＝x，BD＝BF＝y，CD＝CE＝z とおくと

$x+y=9$ …… ①，　$y+z=7$ …… ②，　$z+x=8$ …… ③

①，②，③を辺々加えて $2(x+y+z)=24$　　$x+y+z=12$ …… ④

②と④より $x=5$　　③と④より $y=4$　　①と④より $z=3$

したがって，AE＝5

(2)　△ABC で余弦定理より

$$\cos A=\frac{9^2+8^2-7^2}{2\cdot9\cdot8}=\frac{96}{2\cdot9\cdot8}=\frac{2}{3}$$

△AEF で余弦定理より

$$EF^2=5^2+5^2-2\cdot5\cdot5\cdot\frac{2}{3}=50-\frac{100}{3}=\frac{50}{3}\qquad \text{ゆえに } EF=\sqrt{\frac{50}{3}}=\frac{5\sqrt{6}}{3}$$

(3)　△ABC で余弦定理より

$$\cos B=\frac{9^2+7^2-8^2}{2\cdot9\cdot7}=\frac{66}{2\cdot9\cdot7}=\frac{11}{21}$$

△ABD で余弦定理より

$$AD^2=9^2+4^2-2\cdot9\cdot4\cdot\frac{11}{21}=97-\frac{264}{7}=\frac{415}{7}\qquad \text{ゆえに } AD=\sqrt{\frac{415}{7}}$$

[2] △ABC で余弦定理より

$$BC^2=6^2+10^2-2\cdot6\cdot10\cdot\frac{1}{5}=136-24=112\qquad BC=\sqrt{112}=4\sqrt{7}$$

$\sin\angle A=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ より，

$S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle A=\frac{1}{2}\cdot6\cdot10\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=12\sqrt{6}$

また，$S=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AH$ より，$12\sqrt{6}=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{7}\cdot AH$　　$AH=\frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{7}}=\frac{6\sqrt{42}}{7}$

△ABH で三平方の定理より

$$BH^2=AB^2-AH^2=6^2-\left(\frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{7}}\right)^2=36\left(1-\frac{6}{7}\right)=\frac{36}{7}$$

方べきの定理より $BP\cdot BA=BH^2$　　$6BP=\frac{36}{7}$　　$BP=\frac{6}{7}$

よって，$AP=AB-BP=6-\frac{6}{7}=\frac{36}{7}$

また，△AQH∽△AHC より $\frac{AQ}{AH}=\frac{AH}{AC}$

したがって $AQ=\frac{AH^2}{AC}=\frac{36\cdot6}{7}\times\frac{1}{10}=\frac{108}{35}$